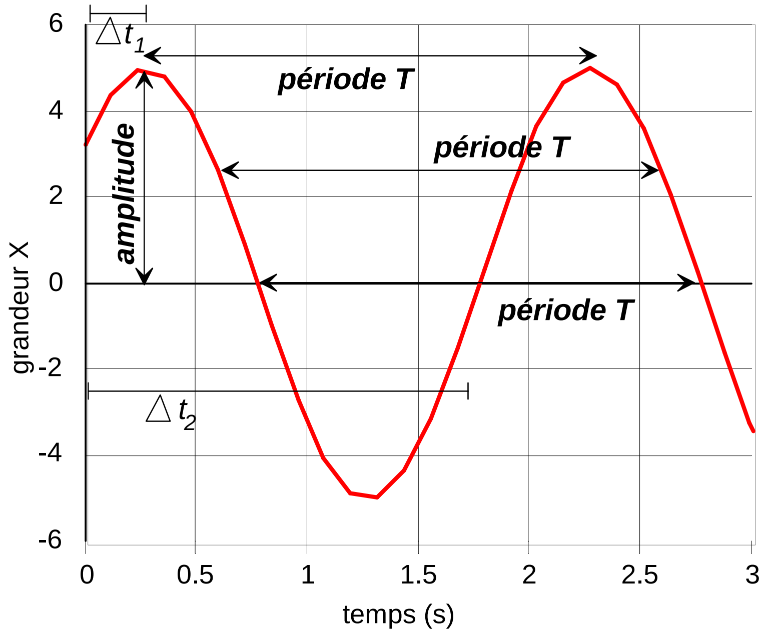
Physique vibratoire

I Grandeurs représentées par des fonctions sinusoïdales du temps.



Le graphe ci-contre est celui d'une grandeur X qui est une **fonction sinusoïdale du temps**.

Son **amplitude A** (même unité que X) est la moitié de la valeur crête à crête.

Sa **période T (**s) est la plus petite durée séparant deux passages par la même valeur, dans le même sens.

Sa **fréquence *f* (**en hz) est

$$\boxed{f=1/T}$$

Sa **pulsation ω** (en rad.s^{-1}) est

$$\boxed{\omega=2\pi f}$$

On peut exprimer *X* en fonction du temps en utilisant la fonction sinus, ou la fonction cosinus.

En utilisant une fonction cosinus :

$X=A\cos(2\pi f_1.t+\varphi) = A.\cos(\omega t+\varphi_1)$

φ_1 est la **phase à l'origine**, qui exprime le décalage horizontal entre X et la fonction cosinus : à l'abscisse $t=0$, le cosinus a atteint son maximum, ce qui n'est pas encore le cas pour X. X est donc en retard sur le cosinus. On a ici $\varphi_1 = \omega\Delta t_1 = 2\pi\frac{\Delta t_1}{T}$.

On peut aussi utiliser une fonction sinus :

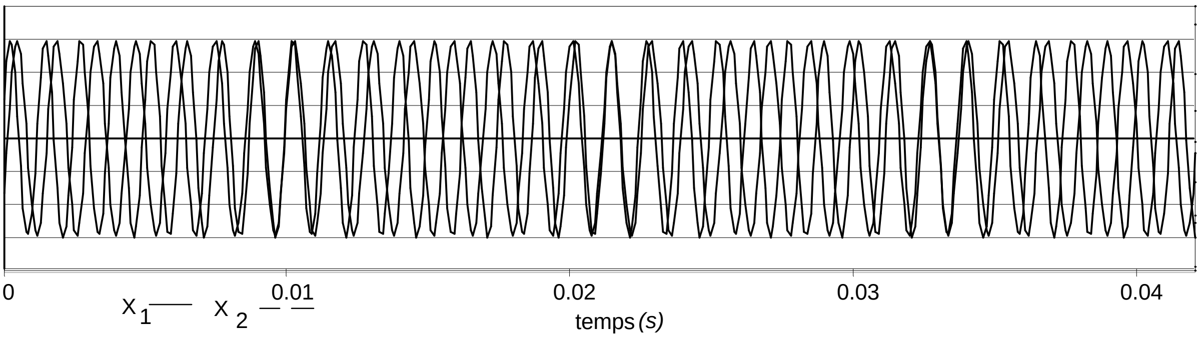
$X=A.\sin(\omega t + \varphi_2)$ avec $\varphi_2 = \omega\Delta t_2 = 2\pi\frac{\Delta t_2}{T}$ ou bien $X=A.\sin(\omega t + \varphi_2')$ avec $\varphi_2'=2\pi+\varphi_2$ (on préfère cette seconde solution car $\varphi_2'\leq\pi/2$)

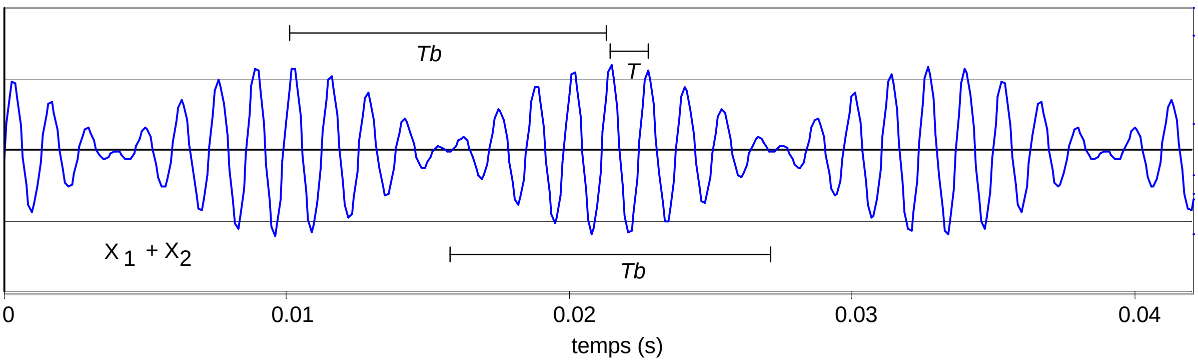
II. Composition de grandeurs périodiques de fréquences voisines. Battements

Le phénomène de battements

En additionnant deux grandeurs périodiques dont les périodes sont proches, on observe un phénomène appelé “battements”. Sur les graphes de la page précédente figurent en haut deux grandeurs de fréquence proche, et en bas leur somme X_1+X_2.

Lorsque X_1 et X_2 sont en phase (par exemple, vers t=0,01 elles atteignent leur maximum en même temps) l’amplitude résultante est maximale. Ensuite elles se décalent très progressivement, jusqu’à être en opposition de phase (par exemple vers t=0,015s, X_1 atteint un maximum et X_2 un minimum). L’amplitude résultante est alors nulle. Et ainsi de suite.





Mathématiquement :

Soit deux grandeurs fonctions sinusoïdales du temps, de fréquences proches et de même amplitude, X_1 et X_2, telles que $X_1 = A\cos(2\pi f_1.t)$ et $X_2 = A\cos(2\pi f_2.t)$ avec f_1-f_2=Δf petit devant f_1 et f_2. (pour simplifier on prend leurs phases nulles à $t=0$)

En appliquant la propriété du cosinus : $2\cos p \cos q = \cos(p+q) + \cos(p-q)$

On a $(X_1 + X_2) = A(\cos(2\pi f_1.t) + \cos(2\pi f_2.t)) = 2A\cos(2\pi(\frac{f_1+f_2}{2}).t)\cos(2\pi(\frac{f_1-f_2}{2}).t)$.

Par rapport au graphe de la page précédente en bas, le terme en $\cos(2\pi(\frac{f_1+f_2}{2}).t)$ décrit les oscillations rapides, pseudo-périodiques (= pas tout à fait périodique car l’amplitude change), de fréquence $f = \frac{f_1+f_2}{2}$ valeur moyenne de f_1 et f_2, de période $T = \frac{1}{f} = \frac{2}{f_1+f_2}$.

Le terme $2A\cos(2\pi(\frac{f_1-f_2}{2}).t)$ correspond à la variation lente de l'amplitude, de période $T_b = \frac{2}{f_1-f_2}$ grande devant T puisque Δf est petit devant f.

On l'appelle période de l'**enveloppe,** ou période des battements.

Avec d'autres notations :

Pour X_1	Pour X_2	Pour les oscillations pseudo-périodiques	Pour les battements (enveloppe)
ω_1	ω_2	$(\omega_1+\omega_2)/2$	$\lvert\omega_1-\omega_2\rvert$
f_1	f_2	$(f_1+f_2)/2$	$\lvert f_1-f_2\rvert$
T_1	T_2	$\frac{2}{(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2})}$	$\frac{2}{\lvert\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\rvert}$

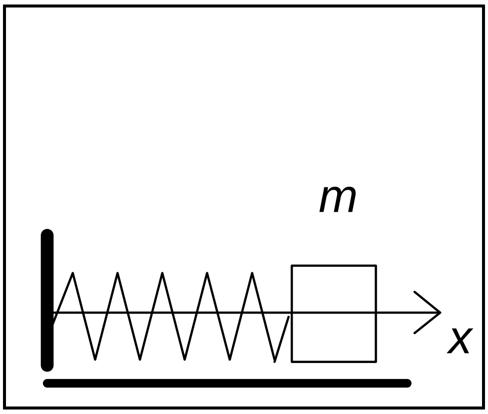
<u>Application</u> : détermination d'une fréquence mal connue f_1 à l'aide d'un signal de fréquence connue f_2 .

<u>III. Oscillateurs mécaniques élastiques</u>

<u>1. Définition</u>

Un système mécanique pourra se comporter comme un oscillateur mécanique élastique dès lors qu'il combine

- une inertie mécanique (propriété liée à la masse du système et éventuellement à sa répartition))
- des propriétés élastiques, se manifestant par l'existence de forces de rappel tendant à le ramener dans son état d'équilibre lorsqu'on lui fait subir une déformation, qui peut être une flexion, une torsion, une variation de longueur.



2. <u>Modélisation par un système masse-ressort</u>

Le dispositif dessiné ci-contre, constitué d'un ressort de masse négligeable, à spires non jointives, lié par une de ses extrémité à un support fixe et par l'autre à un mobile de masse *m*, constitue un **oscillateur** élastique horizontal.

A l'équilibre, le ressort est au repos, le centre d'inertie G mobile se trouve en un point O que l'on prendra comme origine de l'axe horizontal.

a. Système masse-ressort en oscillations libres

Si on déplace le mobile vers la gauche ou la droite et qu'on le lâche, il oscille de lui-même autour de sa position d'équilibre, plus ou moins longtemps selon les frottements. Expérimentalement on constate que si l'amortissement est faible (peu de frottements) la période de ces **oscillations libres** du mobile a toujours la même valeur, pour *k* et *m* donnés.

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ avec } m \text{ en kg , } k \text{ en N.m}^{-1} \text{ et } T_0 \text{ en s}}$$

On appelle cette valeur **période propre** de l'oscillateur, et son inverse $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ est la **fréquence propre.**

Pour un oscillateur plus complexe l'expression de la fréquence propre se complique mais on retrouve les mêmes caractéristiques:

- la fréquence propre diminue quand l'inertie augmente
- la fréquence propre augmente quand la raideur du système augmente.

Quand l'amortissement est faible, l'amplitude varie peu, et l'abscisse *x* du centre d'inertie G du mobile est pratiquement une fonction sinusoïdale du temps. On appelle *x* **élongation** de l'oscillateur.

b. Oscillateur harmonique

Si les frottements sont négligeables, le mouvement de la masse peut être représenté par une fonction sinusoïdale du temps $x = X_{\max}.\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ avec $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. On peut vérifier qu'une telle fonction représente un oscillateur d'énergie mécanique constante.

On a $x = X_{\max}.\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi)$ d'où en dérivant pour trouver la vitesse

$v = -\sqrt{\frac{k}{m}}\,X_{\max}.\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi)$.

L'énergie potentielle élastique vaut $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kX_{\max}^2\cos^2(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi)$

L'énergie cinétique de translation vaut

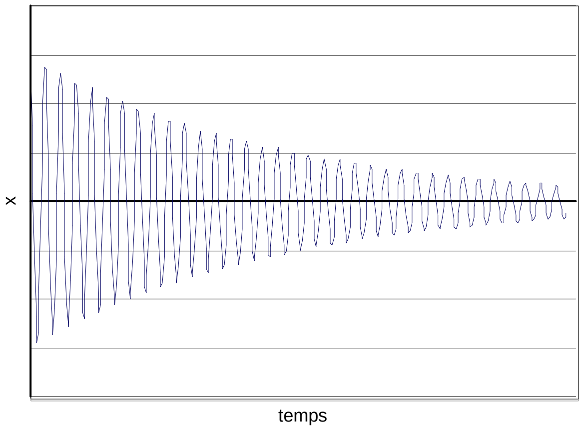
$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{k}{m}X_{\max}^2\sin^2(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi) = \frac{1}{2}kX_{\max}^2\sin^2(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi)$

L'énergie mécanique vaut $E_m = \frac{1}{2}kX_{\max}^2\cos^2(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi) + \frac{1}{2}kX_{\max}^2\sin^2(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi) = \frac{1}{2}kX_{\max}^2$

Elle ne dépend donc pas du temps : elle reste constante. Un tel oscillateur est donc en mouvement perpétuel.

3. Oscillateur avec amortissement fluide

Dans la réalité il existe toujours des frottements. S'ils sont dus au milieu dans lequel se déplace le mobile (par exemple l'air) on les appelle **frottements fluides**.



S'ils sont modérés, ils entraînent une diminution progressive de l'énergie mécanique, donc de l'amplitude des oscillations. L'amplitude décroît exponentiellement (ci-contre) et l'oscillateur finit par s'arrêter à sa position d'équilibre. On parle de **régime pseudo-périodique, ou d'oscillations amorties**.

La pseudo-période des oscillations reste alors égale à la période propre.

Si les frottements sont trop importants, le système retourne à l'équilibre sans osciller : on parle de **régime apériodique**. (c'est ce que réalisent les amortisseurs d'une automobile).

4. Oscillations forcées. Résonance.

Si, à l'aide d'un autre système fournissant un signal périodique , appelé **l'excitateur**, on force un oscillateur à osciller à une fréquence f quelconque appelée **fréquence d'excitation**, on dit qu'il est en **oscillations forcées**.

On constate alors que l'oscillateur n'oscille pas avec la même amplitude pour toutes les fréquences d'excitation.

Si la fréquence d'excitation est très différente de sa fréquence propre, la réponse de l'oscillateur est de faible amplitude.

En revanche, quand la fréquence f se rapproche de f_0, l'amplitude des oscillations augmente fortement. On dit que l'oscillateur entre en **résonance** pour des fréquences voisines de sa fréquence propre (avec un seul 'n').

L'amplitude des oscillations à la résonance est couramment **très supérieure à celle fournie par l'excitateur.**

La résonance est **d'autant plus aigüe que l'amortissement est faible**.

Si la résonance est trop aigüe elle peut détruire l'oscillateur. Il faut donc s'en protéger.

Exemples :

Il est interdit de faire défiler un régiment au pas sur un pont, pour ne pas risquer de le faire entrer en résonance et s'écrouler.

Les constructions qui ont une forte prise au vent (ponts, tours) ne doivent pas entrer en résonance dans le domaine de fréquence des rafales de vent.

Les constructions parasismiques sont rendues plus rigides pour diminuer l'acuité de la résonance en cas de secousse.

Les cloisons (particulièrement les doubles parois) peuvent présenter une fréquence de résonance : il faut éviter que celle-ci se situe dans le domaine des fréquences audibles, pour éviter une gêne sonore, car la résonance aura un effet amplificateur (ainsi la résonance des vitres au passage d'un camion est souvent perceptible).