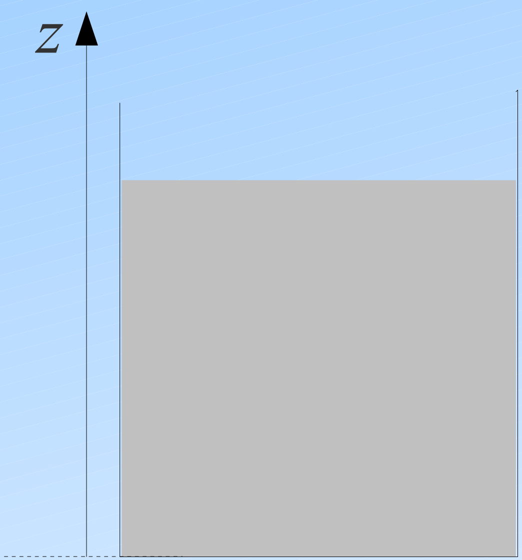
Eléments de Dynamique des Fluides Incompressibles

A - Rappels

- Modèle du fluide parfait
    - Incompressible
    - Non visqueux

- Relation fondamentale de la statique des fluides :

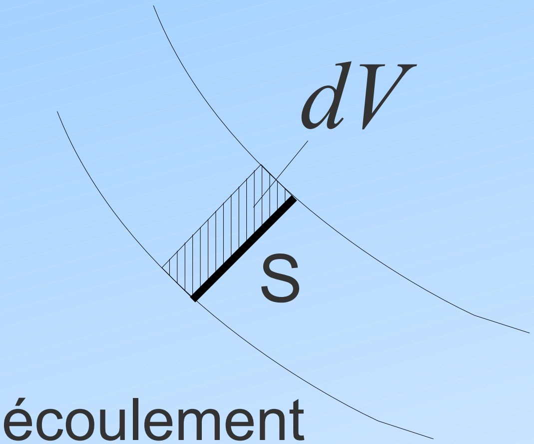


  - la quantité $(p+\rho.g.z)$ a la même valeur en tout point d'un fluide à l'équilibre

    p: pression en pascal
    ρ: masse volumique en $kg.m^{-3}$
    g: intensité de la pesanteur en $N.kg^{-1}$
    z : altitude en m

B - Débit et lois de conservation

1. Débit



Débit volumique Q

$$Q = \frac{dV}{dt} \quad \text{en } m^3.s^{-1}$$

dV volume de fluide
traversant S section droite
de l'écoulement pendant la durée *dt*

Débit massique Q_m

$$Q_m = \frac{dm}{dt}$$ en $kg.s^{-1}$

dm masse de fluide
traversant S section droite
de l'écoulement pendant la durée dt

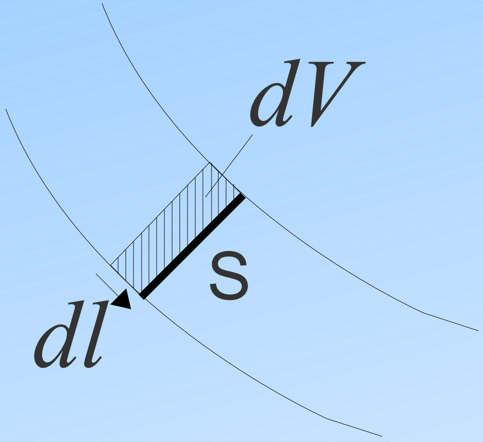
$$Q_m = \rho \times Q$$

2. Vitesse d'écoulement

La vitesse d'écoulement en un point est égale à la vitesse des particules de fluide quand elles passent par ce point.

Pour un fluide parfait elle a la même valeur en tout point d'une section droite de l'écoulement.

3. Relation de continuité



Vitesse d'écoulement en S :

$$v = \frac{dl}{dt}$$

et $dV = S.dl$ donc

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{S.dl}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q = S.v}$$

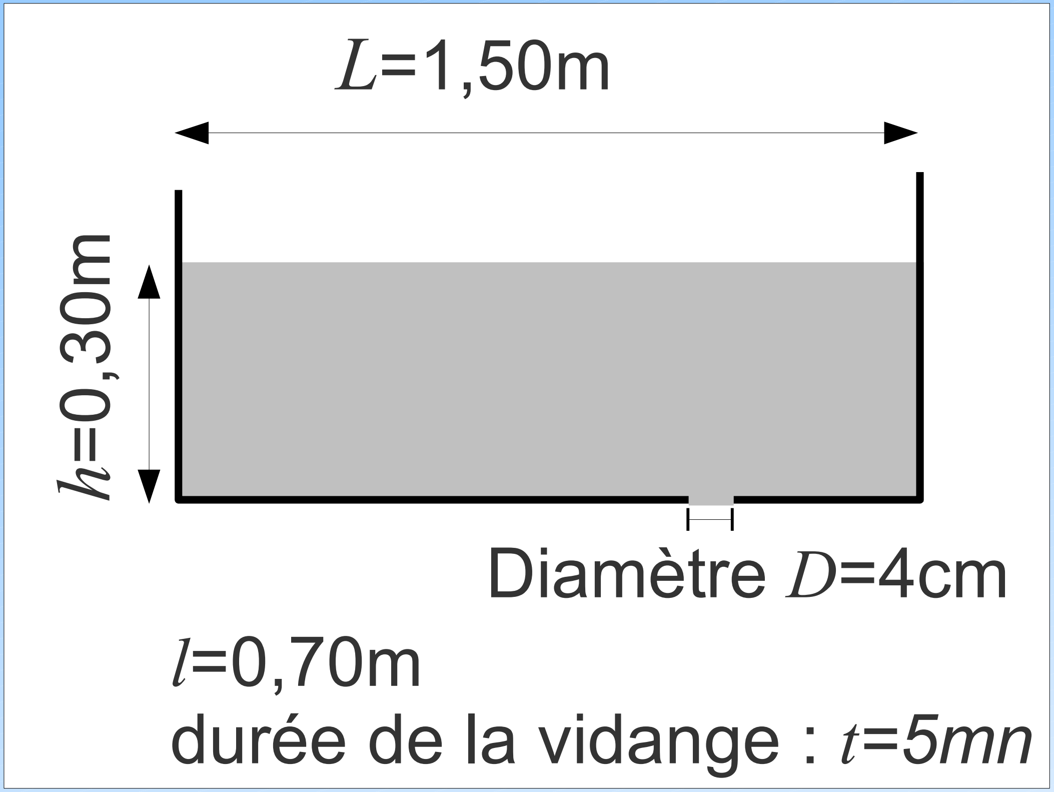
Ecoulement permanent :
le débit est le même en tout point

Relation de continuité :

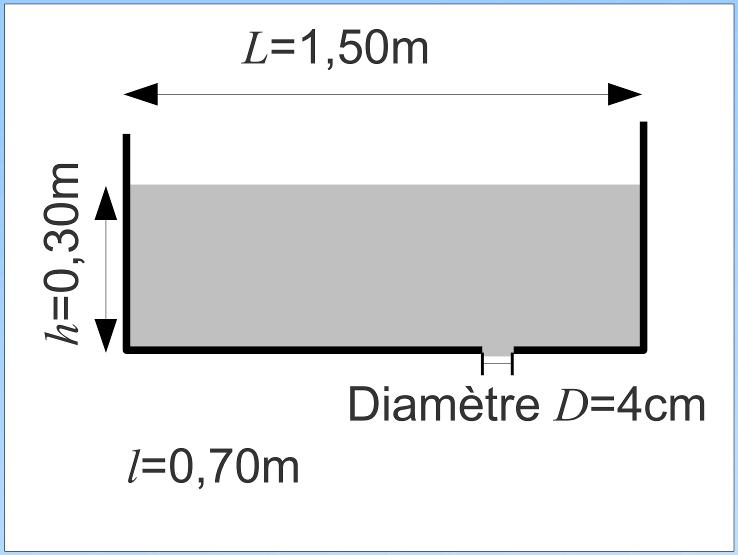
$\boxed{\text{Le produit } S.v \text{ a même valeur dans tout l'écoulement}}$

Donc la vitesse d'écoulement est inversement proportionnelle à la section de l'écoulement

Exemple :



- Débit : Q=1,05 L.s^{-1}



- Vitesses d'écoulement :
  - à la surface : $v=\frac{Q}{(l\times L)}=1\mathrm{mm.s}^{-1}$
  - à l'orifice de vidange :

$$v=\frac{Q}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2}=0.84\mathrm{m.s}^{-1}$$

C. Théorème de Bernouilli

1. Forme générale

Soient deux points A (pression p_A, vitesse d'écoulement v_A, altitude z_A) et B (p_B, v_B, z_B) d'un écoulement

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\rho v_B^2+\rho g z_B+p_B\right)-\left(\frac{1}{2}\rho v_A^2+\rho g z_A+p_A\right)=\frac{P}{Q}}$$

où P est la puissance fournie à l'écoulement,entre A et B, par toutes les forces autres que le poids et les forces de pression (typiquement : machines, frottements internes pour un fluide visqueux)

$\frac{1}{2}\rho v^2$ a la dimension d'une pression.

On l'appelle "pression dynamique" car c'est l'équivalent d'une pression due à la vitesse.

Le théorème de Bernouilli peut s'écrire aussi

$$\left(\frac{1}{2}v_B^2+g\,z_B+\frac{p_B}{\rho}\right)-\left(\frac{1}{2}v_A^2+g\,z_A+\frac{p_A}{\rho}\right)=\frac{P}{Q\,.\,\rho}=\frac{P}{Q_m}$$

La quantité $\left(\frac{1}{2}v^2+g\,z+\frac{p}{\rho}\right)$ est la <u>charge massique</u> du fluide en mouvement.

Elle diminue s'il y a des frottements ou si le fluide fournit de la puissance à une machine :c'est la "perte de charge"

2. Cas particuliers importants

Pour un fluide non visqueux, en l'absence de forces autres que le poids et les forces de pression (pas de machine) :

La quantité $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p$ a la même valeur partout dans l'écoulement

Remarque : pour v=0 on retrouve la loi fondamentale de la statique

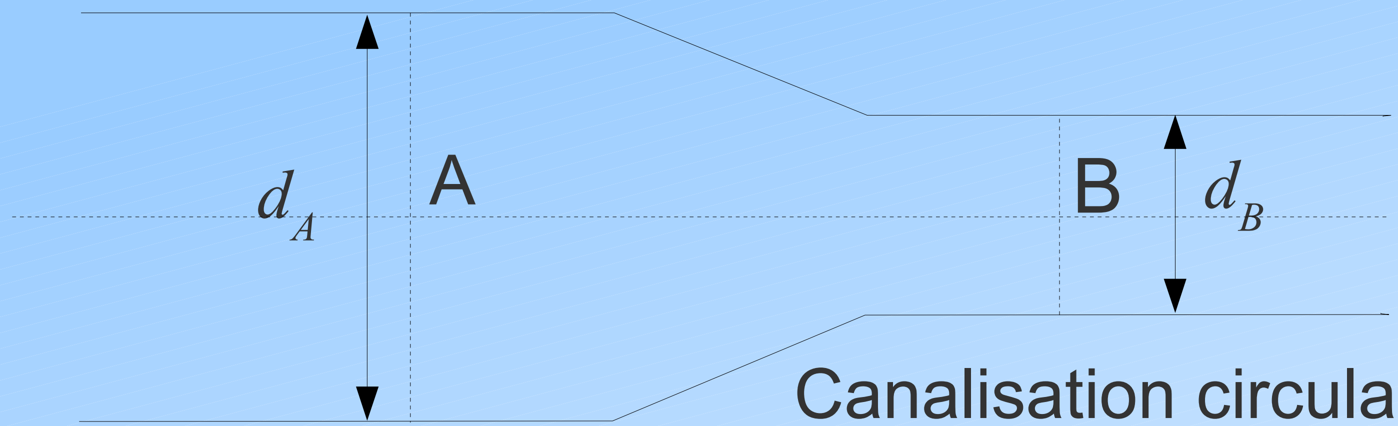
Si l'écoulement est horizontal

alors $(\frac{1}{2}\rho v^2 + p)$ a la même valeur dans tout l'écoulement.

Cela implique que

plus la pression en un point est grande plus la vitesse y est faible.

Exemple : diminution de la pression due à un rétrécissement.

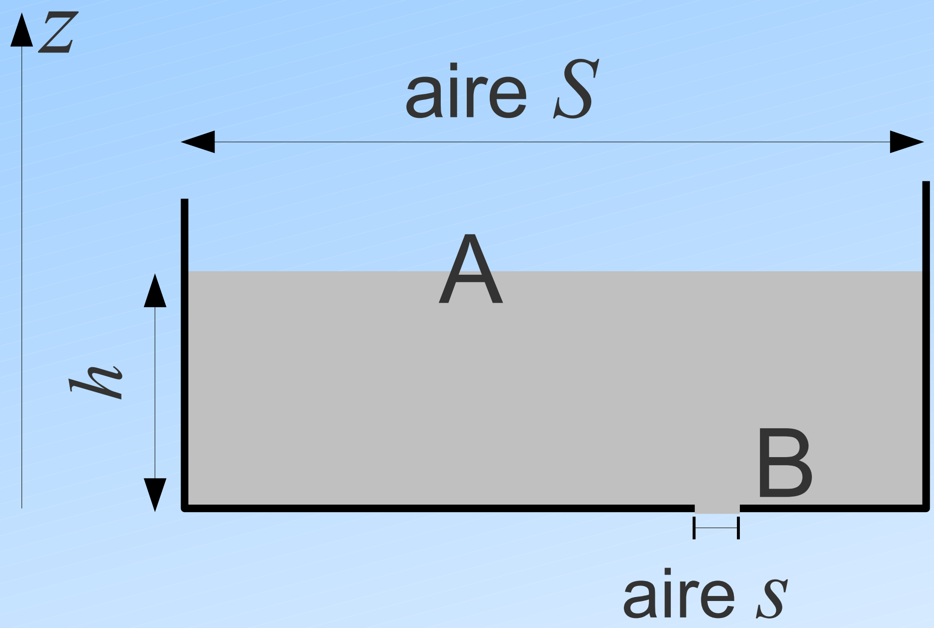


- Relation de continuité : $v_A d_A^{\,2} = v_B d_B^{\,2}$
- Théorème de Bernouilli : $\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + p_B$

La vitesse en B est plus grande, la pression plus faible : c'est l'effet Venturi

3. Application à la vidange d'un réservoir : relation de Torricelli

*(à connaître **et** à savoir retrouver)*



$s \ll S$

Conséquence pour les vitesses :

$v_B \gg v_A$

On peut négliger v_A devant v_B : $v_A \approx 0$

Théorème de Bernouilli :

$$(\frac{1}{2}\rho v_B^2+\rho g z_B+p_B)-(\rho g z_A+p_A)=0$$

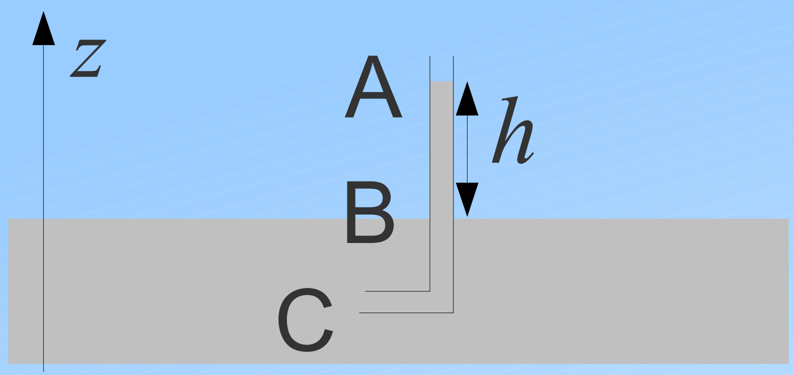
et comme $p_B=p_A$

$$(\frac{1}{2}\rho v_B^2+\rho g z_B)-(\rho g z_A)=0$$

d'où $v_B=\sqrt{2g(z_A-z_B)}$

$\boxed{v_B=\sqrt{2gh}}$ relation de Torricelli

4.Application à la mesure d'une vitesse



Exemple d'un écoulement uniforme ($v_B = v_C = v$) sous la pression atmosphérique (rivière...),

- $p_A = p_B$=pression atmosphérique
- v_A=0
- Bernouilli entre A et B : $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z_B = \rho g z_A$

→ d'où $v = \sqrt{2gh}$